Brémont Estelle
Golfier Emeric
Lambert Guillaume

RAPPORT DU PROJET INDUSTRIEL

Encadrants : M. Sequeira, M. Boï.

03/03/2005

PLAN DU RAPPORT:

1°) Poser la problématique

- 1.1°) Sujet du projet
- 1.2°) Formalisation du projet
- 1.3°) Résolution d'un système matriciel
  - 1.3.1°) Détermination des données
  - 1.3.2°) Détermination des cas de résolution du système

2°) Méthodes utilisées

- 2.1°) Méthode des Moindres Carrés
- 2.2°) Décomposition en Valeurs Singulières
- 2.3°) Méthode de Jacobi

3°) Comparaison des méthodes de résolution: TER/Projet

- 3.1°) Schémas récapitulatifs du TER et du Projet
- 3.2°) Deux approches différentes des moindres carrés
  - 3.2.1°) TER : des moindres carrés vers une matrice pseudo-inverse
  - 3.2.2°) Projet: On part d'une matrice pseudo-inverse…
  - 3.2.3°) … vers les moindres carrés

4°) Résultats

5°) Et ensuite…

6°) Annexes / Rappels mathématiques

- 6.1°) Rang d'une matrice
- 6.2°) Pseudo-inverse d'une matrice

7°) Sources

1°) Poser la problématique

1.1°) Sujet du projet

« L'objectif est de repérer automatiquement les éléments de la scène de base (dont les conditions d'éclairement peuvent varier) pour détecter ensuite les éléments ajoutés. Des travaux préliminaires (et probants) ont été effectués dans ce domaine pour caractériser l'appartenance ou pas d'un pixel à la scène de base (TER). Le but de ce projet est de mettre en place une méthode robuste pour assurer cette caractérisation sur toute l'image. »

Le projet consiste à rechercher, avec l'aide de la méthode des moindres carrés, une relation linéaire (ou non) entre un point et son voisinage. Cette relation, établie à partir d'un jeu d'images de référence, permet de déterminer pour chaque pixel une valeur prédictive et ainsi de détecter un objet ajouté.

1.2°) Formalisation du projet

La relation entre un point et son voisinage sera défini par une relation linéaire, comme l'exemple :

(Voisin n°1)x(Coefficient C^1)
+ (Voisin n°2)x(Coefficient C^2)
+ (Voisin n°3)x(Coefficient C^3)
+ (Voisin n°4)x(Coefficient C^4)
+ (Voisin n°5)x(Coefficient C^5)
+ (Voisin n°6)x(Coefficient C^6)
+ (Voisin n°7)x(Coefficient C^7)
+ (Voisin n°8)x(Coefficient C^8) = Valeur du point

Pour chaque point, dans le cadre de la 8-connexité.

Soit, dans une représentation matricielle:

$$(V^1\ V^2\ V^3\ V^4\ V^5\ V^6\ V^7\ V^8) \cdot \begin{pmatrix} C^1 \\ C^2 \\ C^3 \\ C^4 \\ C^5 \\ C^6 \\ C^7 \\ C^8 \end{pmatrix} = P$$

Pour chaque valeur d'un point P de l'image.

Dans le cas général, nous parlerons de v-connexité et nous considèrerons n images de référence.

Autrement dit, on obtient le système matriciel:

$$\begin{pmatrix} V_1^1 & V_1^2 & \dots & V_1^v \\ & \dots & & \\ V_n^1 & V_n^2 & \dots & V_n^v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C^1 \\ C^2 \\ \vdots \\ C^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$$

Soit : V C=P.
Ce système nous servira donc à déterminer les valeurs prédictives.

1.3°) Résolution d'un système matriciel

1.3.1°) Détermination des données

Tout au long du projet:
- Nous étudierons des images en couleurs d'une résolution de plus d'un million de pixels pour chaque jeu d'images.
- Nous utiliserons un voisinage en v-connexité (pour les essais nous avons posé v=8).
- Nous utiliserons n images de référence (pour les essais nous avions des jeux de photos où n=13, n=14, et n=15), représentant une scène sous le même axe de prise de vue mais avec des luminosités différentes.

Pour chacun des points, nous considèrerons:
- une matrice P, de taille: 1 colonne et n lignes. Chacun de ses coefficients P_i correspond à la valeur de luminance d'un point de la $i^{ème}$ image de référence, elle est comprise entre 0 et 255 (inclus).
- une matrice V, de taille: v colonnes et n lignes. Ses v coefficients de la $i^{ème}$ ligne représentent les valeurs chromatiques des voisins (en v-connexité) du point P_i. Les valeurs des V_i^j sont également des valeurs entières de luminance comprises entre 0 et 255 (inclus).
- une matrice C, de taille: 1 colonne et v lignes. Solution du système matriciel V C=P.

1.3.2°) Détermination des cas de résolution du système

L'objectif du projet consiste donc à trouver une solution au système matriciel V C=P, et ce quelles que soient les caractéristiques de la matrice V de taille (n,v) et des vecteurs-colonnes C(v,1) et P(n,1).

Nous constatons plusieurs cas possibles dans la résolution de ce système. Ces cas peuvent être déterminés à partir du rang* de la matrice V, du rang de la matrice [V P] et de la comparaison entre les valeurs de n et v.

On pose :

Matrice [V P] = matrice 'augmentée' de taille (n,v+1).

M^+= matrice pseudo-inverse**.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Système V.C=P</th><th colspan="2">Rang(V) = Rang([V P])***</th><th colspan="2">Rang(V) Rang([V P])****</th></tr>
<tr><th>Rang(V)=v
*****</th><th>Rang(V)<v
******</th><th>Rang(V)=v</th><th>Rang(V)<v</th></tr>
<tr><td rowspan="2">n<v</td><td rowspan="2">Sous-déterminé</td><td colspan="2">Infinité de solution.
On peut obtenir une solution de norme minimale par :
$C_{min}=V^+ P$</td><td colspan="2" rowspan="2">Aucune solution ne peut satisfaire le système. Il existe plusieurs solutions au sens des moindres carrés. Une solution de norme minimale de celles apportées par la méthode des moindres carrés est :
$C_{MCmin}=V^+ P$</td></tr>
<tr><td>Solution unique :
$C=V^{-1} P$</td><td rowspan="2">Infinité de solutions.
On peut obtenir une solution de moindre norme :
$C_{min}=V^+ P$</td></tr>
<tr><td>n=v</td><td>Carré</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">n>v</td><td rowspan="2">Sur-déterminé</td><td rowspan="2">La suppression des équations linéairement dépendantes ramène au cas d'un système carré :
$C=V^{-1} P$</td><td rowspan="2"></td><td>Aucune solution ne peut satisfaire le système. Il existe une solution au sens des moindres carrés :
$C_{MC} = ({}^TV\ V)^{-1}\ {}^TV\ P$</td><td>Aucune solution ne peut satisfaire le système. Il existe plusieurs solutions au sens des moindres carrés. Une de ces solutions, de norme minimale, est :
$C_{MCmin}=V^+ P$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Avec : C la solution unique, C_{min} la solution de norme minimale et C_{MC} la solution au critère des moindres carrés.

---

* Voir annexe en fin du rapport sur la définition du rang d'une matrice.

** Voir en annexe en fin du rapport sur la définition d'une matrice pseudo-inverse.

*** Soit le cas où P est une combinaison linéaire des vecteurs de la matrice V. Il peut exister une solution exacte.

**** Soit le cas où P n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs de la matrice V. La solution ne peut alors être qu'une approximation.

***** Soit le cas où il n'y a pas de redondance.

****** Soit le cas où il y a au moins une redondance.

Ce tableau décrit les différentes résolutions possibles selon les valeurs de v et de n. Dans nos jeux d'images de référence, nous avons n>12 et nous avons défini v=8. Nous nous plaçons donc dans la partie basse du tableau ci-dessus. Cependant, nous constatons qu'une solution optimale la plus robuste possible devrait être en mesure de gérer les trois cas n<v, n=v et n>v quels que soient V et P.

2°) Méthodes utilisées

Afin de résoudre les différents cas rencontrés, le TER utilisait une application matricielle brute du critère des moindres carrés. Nous verrons que nous utilisons dans le programme la méthode de décomposition en valeurs singulières. Celle-ci permet de traiter, le cas échéant, le critère des moindres carrés, tout en permettant également de traiter le cas d'une solution de moindre norme (dans le choix entre une infinité de solutions) ainsi que, bien évidemment, le cas trivial où V est inversible.
Nous allons donc tout d'abord voir en quoi consiste ces méthodes.

2.1°) Méthode des Moindres Carrés

La méthode des moindres carrés consiste à trouver une solution approximée pour un système sur-déterminé. Le critère d'optimisation de l'approximation est la minimisation du carré de l'écart à la solution optimale.

Définition à partir d'un exemple:
Considérons des résultats expérimentaux liant deux paramètres x et y évoluant dans le temps selon une loi linéaire: $y^i = a\ x^i$
Nous disposons donc d'un nombre n de mesures, telles que :

$$y^1 = a\ x^1, \quad y^2 = a\ x^2, \quad \dots \quad , \quad y^n = a\ x^n$$

Soit le système matriciel Y=a X, avec Y= $\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix}$ et X= $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}$

Nous nous trouvons ainsi devant un système à 2 inconnues et n équations. Ce type de système finit par se retrouver sur-déterminé, c'est à dire que l'on a 'trop' d'équations et que l'on va fatalement rencontrer un cas du type (d'autant plus que n sera grand):

...

$3 = a \ \ 2$

...

$4 = a \ \ 2$

...

Soit 2 = a = 3/2, rendant le système impossible.

Supposons les mesures de y, erronées à une variable e près. On a alors :

$$y^1 + e^1 = a \ \ x^1$$
$$y^2 + e^2 = a \ \ x^2$$

...

$$y^n + e^n = a \ \ x^n$$

Et le système devient Y+E=a X avec le vecteur E = $\begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \dots \\ e^n \end{pmatrix}$, relatif aux erreurs.

Or, nous voulons bien évidemment une solution la plus proche possible de la solution optimale (cas où l'erreur est nulle). Nous allons donc minimiser cette erreur.

La méthode des moindres carrés nous oriente vers un critère de minimisation relatif à la somme des carrés des coefficients du vecteur d'erreur E, ce qui revient à poser que la somme

$(e^1)^2 + (e^2)^2 + \dots + (e^n)^2$ doit être minimale.

Or, nous pouvons remarquer que le transposé de E est:

$${}^TE = (e^1, e^2, \dots, e^n)$$

Et donc que : ${}^{T}E.E = (e^1, e^2, \dots, e^n) \cdot \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \dots \\ e^n \end{pmatrix} = (e^1)^2 + (e^2)^2 + \dots + (e^n)^2$
Nous allons donc chercher ${}^{T}E.E$ minimale.

Posons le système relativement à E :
Soit $E = a.X - Y$
${}^{T}E\ E$ devient alors :

$${}^{T}(a\ X - Y)\quad (a\ X - Y)$$

Et ${}^{T}(a\ X - Y)\quad (a\ X - Y) = a^2\ {}^{T}X\ X - a\ {}^{T}X\ Y - a\ {}^{T}Y\ X + {}^{T}Y\ Y$

Or, $(x^1, x^2, \dots, x^n) \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix} = (y^1, y^2, \dots, y^n) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}$

C'est à dire ${}^{T}X\ Y = {}^{T}Y\ X$

D'où : ${}^{T}E\ E = a^2\ {}^{T}X\ X - 2a\ {}^{T}X\ Y + {}^{T}Y\ Y$

${}^{T}X\ X$ étant une somme de carrés, $a^2\ {}^{T}X\ X \geq 0$.
Le minimum de ${}^{T}E\ E$ se trouve donc en annulant sa dérivée par rapport à a.
La dérivée par rapport à a de chaque terme donne :

$$\frac{d(a^2.{}^{T}X.X)}{da} = 2a.{}^{T}X.X \qquad \frac{d(2a.{}^{T}X.Y)}{da} = 2{}^{T}X.Y \qquad \frac{d({}^{T}Y.Y)}{da} = 0$$

Ainsi, la dérivée de ${}^{T}E\ E$ par rapport à a est égale à :

$$2a\ {}^{T}X\ X - 2{}^{T}X\ Y$$

Cette dérivée est nulle quand $2a\ {}^{T}X\ X - 2{}^{T}X\ Y = 0$

Autrement dit, il suffit donc de résoudre : ${}^{T}X\ X\ a = {}^{T}X\ Y$

Dans cet exemple a est un unique coefficient, mais le résultat est le même dans le cas d'un vecteur A. Le minimum est alors obtenu par le gradient nul de ${}^{T}E\ E$, en fonction de tous les coefficients du vecteur A.

Dans le cadre du projet, appliquer les moindres carrés revient donc à passer du système V C=P au système ^{T}V V C=^{T}V P dont le vecteur C sera une solution approximée où l'erreur d'approximation sera minimale, selon le critère des moindres carrés.

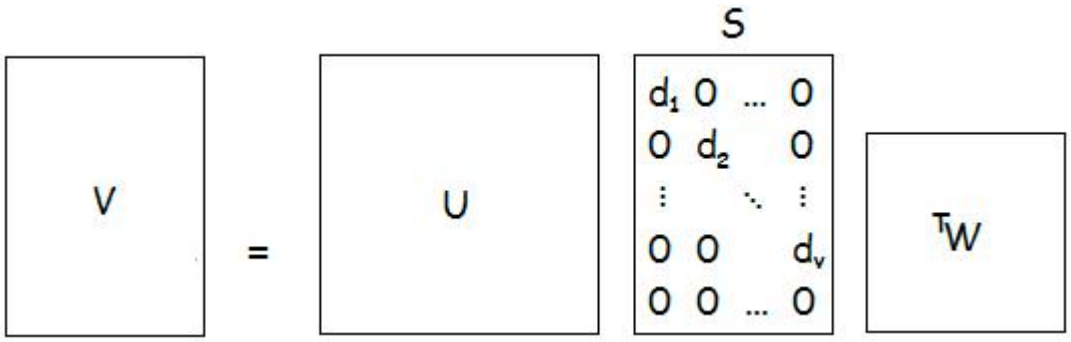
2.2°) Décomposition en Valeurs Singulières

La décomposition en valeurs singulières (DVS) décompose la matrice V(n,v) en un produit de 3 matrices :

$$V = U.S.{}^{T}W$$

Avec :

- S la matrice diagonale des valeurs singulières de V triées à partir du coin supérieur gauche par ordre décroissant. Les valeurs singulières s'obtiennent en prenant les racines carrées positives des valeurs propres de V ^{T}V ou de ^{T}V V. Le fait que dans notre programmation n>v=8, nous choisirons, par souci de matrice de taille moindre, ^{T}V V.
- W la matrice orthogonale des vecteurs propres de ^{T}V V soumis aux mêmes permutations de colonnes que celles effectuées sur la matrice S par le tri des valeurs propres.
- U la matrice orthogonale des vecteurs propres de V ^{T}V obtenue une fois les matrices S et ^{T}W déterminées.



Les avantages majeurs de la décomposition en valeurs singulières sont sa robustesse ainsi que sa souplesse d'utilisation. En effet, alors que beaucoup de solutions permettent d'obtenir un résultat du système V.C=P, chacune de ces méthodes demandent des conditions particulières, notamment sur les matrices d'entrée, et ne fonctionnent que dans un cadre plus ou moins restreint.

La décomposition en valeurs singulières permet en un même traitement et quelque soit la matrice V :
- de rendre la solution unique dans le cas trivial où V est inversible,
- de donner la solution optimale au critère des moindres carrés dans le cadre d'un système sur-déterminé,
- et enfin de donner la solution de moindre norme dans le cadre d'un système sous-déterminé.

Il va donc s'agir maintenant d'être capable de trouver les valeurs singulières et les vecteurs propres d'une matrice.
Plusieurs méthodes existent dont notamment la méthode de Jacobi permettant, en quelques itérations, d'obtenir en un seul appel, non seulement les valeurs propres utiles au calcul des valeurs singulières, mais également les vecteurs propres dont nous avons besoin pour définir U et W.
C'est pourquoi nous l'avons choisie.

2.3°) Méthode de Jacobi

Cette méthode nécessite une matrice symétrique. Or, cette méthode sera lancée sur les matrices $V^T V$ ou $^T V V$, symétriques par construction. L'inconvénient de la méthode n'en est donc pas un dans notre cas.

On effectue des rotations dans l'espace pour annuler successivement les coefficients de la matrice hors de la diagonale, sur laquelle seront placées en sortie de la fonction les valeurs propres recherchées.
La méthode de Jacobi revient à effectuer une suite de transformations similaires orthogonales. Chaque transformation est une simple rotation planaire qui permet d'annuler un élément de la matrice A initiale. Ces rotations nous permettront également d'obtenir les vecteurs propres de la matrice.

La rotation élémentaire $P_{pqè}$ est donnée par la matrice

$$P_{pqè} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & p & & q & & \end{matrix}$$

avec

c=cos(è) et s=sin(è)

è angle de rotation

Soit la matrice A' telle que $A' = {}^{T}P_{pqè} \; A \; P_{pqè}$

En notant a_{ij} les coefficients de la matrice A, on obtient après calcul que

$$a'_{rp} = ca_{rp} - sa_{rq}$$
$$a'_{rq} = ca_{rp} + sa_{rq}$$
$$a'_{pp} = c^2a_{pp} + s^2a_{qq} - 2csa_{pq}$$
$$a'_{qq} = s^2a_{pp} + c^2a_{qq} + 2csa_{pq}$$
$$a'_{pq} = (c^2-s^2)\, a_{pq} + cs(a_{pp}-a_{qq})$$

avec r p et r q .

Si on annule le terme a'_{pq}, on a le rapport È :

$$È = (c^2 - s^2) / (2sc) \quad (1)$$
$$= \cot(2\,è)$$
$$= (a_{qq} - a_{pp}) / 2a_{pq}$$

Si on appelle $t = s/c$, on obtient en utilisant (1)

$$t^2 + 2t\grave{E} - 1 = 0$$

La plus petite des racines correspond à un angle de rotation inférieur à /4 et donne la méthode la plus stable numériquement. Cette racine peut s'exprimer sous la forme :

$$t = sgn(\grave{E}) / (|\grave{E}| + (\grave{E}^2 + 1))$$

En utilisant $c^2 + s^2 = 1$, on obtient pour c que :

$$c = (1 + t^2)^{-1}$$

et on a immédiatement $s = tc$. En imposant que le terme a'_{pq} s'annule, on a finalement les relations suivantes

$$a'_{pp} = a_{pp} - ta_{pq}$$
$$a'_{qq} = a_{qq} + ta_{pq}$$
$$a'_{rp} = a_{rp} - s(a_{rq} + T a_{rq})$$
$$a'_{rq} = a_{rp} + s(a_{rq} + T a_{rq})$$

avec T défini par : $T = s / (1 + c)$

En calculant la somme S, on a : $S = |a_{rs}|^2$ avec r s

Ainsi, la suite des transformations conduit à faire décroître la contribution des éléments diagonaux. Comme la transformation est orthogonale, la somme des carrés des éléments de la matrice est conservée, ce qui revient à ce que la somme des carrés de la diagonale augmente de ce qui a été perdu par les éléments non diagonaux.

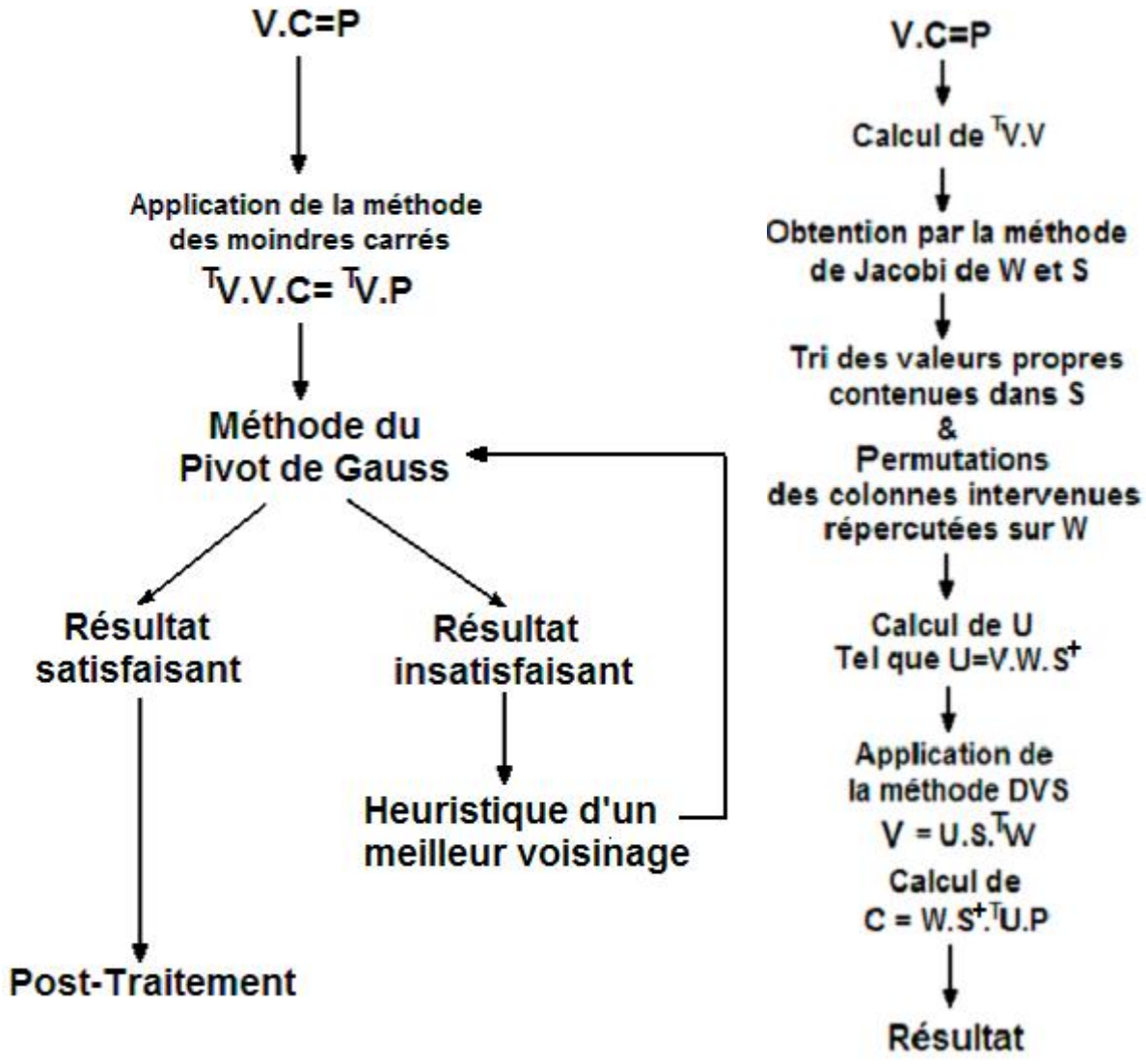
Ainsi formellement, on peut choisir les éléments de la matrice A dans n'importe quel ordre et on obtient une matrice qui converge vers la matrice diagonale.

La somme S constitue la condition d'arrêt : chaque itération de la méthode de Jacobi la faisant décroître, dès que cette somme est inférieure à une précision fixée l'algorithme s'arrête.

Au terme de cette procédure on a : $D = {}^{T}V\ A\ V$
où D est la matrice diagonale contenant les différentes valeurs propres et V est une matrice contenant les vecteur propres correspondants.

3°) Comparaison des méthodes de résolution : TER / Projet

3.1°) Schémas récapitulatifs du TER (gauche) et du Projet (droite):



3.2°) Deux approches différentes des moindres carrés :

3.2.1°) TER : des moindres carrés vers une matrice pseudo-inverse :

Le TER a appliqué la méthode des moindres carrés dans leur version brute, comme montré dans la partie 2.1, en utilisant le système :

$$^{T}V\ V\ C = {}^{T}V\ P.$$

Cependant, le tableau de la partie 1.3.2 met en évidence que cette façon de procéder ne va pas permettre de pouvoir traiter tous les cas rencontrables.

En effet, le schéma ci-dessus montre que l'algorithme de Gauss de calcul d'inverse de matrice est bien employé. Le code du programme du TER montre qu'il est bien utilisé sur la matrice ($^{T}V\ V$).

En fait, le TER applique comme solution au système :

$$C = (^{T}V\ V)^{-1}\ {}^{T}V\ P$$

par définition de la méthode des moindres carrés.

L'algorithme du TER peut être présenté comme la dernière ligne du tableau de la partie 1.3.2 (avec quelques modifications), soit :

Système V.C=P		Le système admet au moins une solution		Le système n'admet pas de solution	
		Rang(V)=v (pas de redondance)	Rang(V)<v (au moins une redondance)	Rang(V)=v (pas de redondance)	Rang(V)<v (au moins une redondance)
n>v	Sur-déterminé	Cas V inversible : La suppression des équations linéairement dépendantes ramène au cas d'un système carré : $C=V^{-1}\ P$	Cas non traité par le TER. L'algorithme va alors chercher à retomber dans l'un des deux autres cas en modifiant le choix des voisins et donc de v. En effet, on a ici Rg(V)<v, et en diminuant v on finira bien par retomber sur le cas Rg(V)=v (cas où Gauss renvoie un résultat)	Aucune solution ne peut satisfaire le système. Il existe une solution (au moins) au sens des moindres carrés : $C_{MC} = (^{T}V\ V)^{-1}\ {}^{T}V\ P$	Cas non traité par le TER. L'algorithme va alors chercher à retomber dans l'un des deux autres cas en modifiant le choix des voisins et donc de v. En effet, on a ici Rg(V)<v, et en diminuant v on finira bien par retomber sur le cas Rg(V)=v (cas où Gauss renvoie un résultat)

Nous constatons en premier lieu que le reste des cas du tableau n'est pas pris en compte. Cependant, étant donné que nous fixons n > v=8, ce n'est pas vraiment un problème. Mais il est alors interdit de recourir, dans un éventuel traitement ultérieur de l'algorithme, à une modification de n et/ou v qui fasse sortir de ce cadre. De plus, le cas de redondance dans la matrice V sort des limites de l'algorithme et le cas est évité en partant d'un voisinage de v=1, puis en incrémentant v de 1 tant que le système est libre (Gauss renvoie un succès).
Cet algorithme permet donc d'éviter le cas où Rang(V)<v, et pour cause : la matrice (${}^{T}V\ V$) n'est inversible que si le rang(V)=v.

En fait, le système des moindres carrés correspond donc à donner une solution du type : $C = ({}^{T}V\ V)^{-1}\ {}^{T}V\ P$, soit en fait : $C = V^{+}\ P$, avec $V^{+} = ({}^{T}V\ V)^{-1}\ {}^{T}V$.
Autrement dit, la méthode des moindres carrés appliquée de façon brute calcule une matrice pseudo-inverse de V dans le cas où Rang(V)=v avec n >v (c'est à dire que la matrice V est libre pour n > v).

3.2.2°) Projet: On part d'une matrice pseudo-inverse…
Le projet part de la recherche d'une matrice pseudo-inverse V^{+} permettant de trouver une solution au système $V\ C = P$ telle que :

$$C = V^{+}\ P.$$

Ainsi, l'utilisation de la DVS va nous permettre d'obtenir la décomposition :

$$V = U\ S\ {}^{T}W$$

avec U(n,n) et W(v,v) orthogonales et S(n,v) diagonale définies dans la partie 2.2.

à partir de laquelle nous allons pouvoir créer :

$$V^{+} = (U\ S\ {}^{T}W)^{-1}$$

Or, par définition de la DVS et grâce à l'orthogonalité de U et de W, $U^{-1}={}^{T}U$ et $W^{-1}={}^{T}W$.
De plus, soit la matrice $S^{\ddagger}(v,n)$ telle que pour chaque coefficient $ó^{\ddagger i}{}_{j}$ de $S^{\ddagger}$:

$ó^{‡i}_j = 0$ pour tout i,j

$ó^{‡i}_i = 0$ si $ó^i_i=0$ pour tout 0 <= i <= min(v,n)

sinon $ó^{‡i}_i = 1/ó^i_i$ pour tout 0 <= i <= min(v,n)

La DSV nous permet de poser que $S^‡=S^+$.

Ainsi, $V^+ = (U\ S\ ^TW)^{-1}$

Soit $V^+ = W\ S^+\ ^TU$

Ainsi, en tant que matrice pseudo-inverse de V, V^+ va permettre d'obtenir une solution C quelle que soit V. On ne cherche même plus à savoir si V est inversible ou non : si elle l'est alors on a $V^+=V^{-1}$, et sinon la matrice V^+ joue par définition le même rôle que V^{-1}.

La solution que l'on a alors est :

$$C = W\ S^+\ ^TU\ P$$

Cette solution est donc valide par construction dans tous les cas, y compris ceux qui ne surviennent pas dans nos jeux d'essais (cas où n<v et n=v). Rien n'indique que l'on ne tombera pas un jour dans un cas où l'on ne disposera pas d'assez d'images de référence. La méthode sera alors encore valide.

Cela signifie par exemple que cette méthode fonctionne dans tout le tableau de la partie 1.3.2 !

De plus, la robustesse à toute épreuve de cette méthode permet donc la possibilité d'une variation du nombre d'images de référence. Leur nombre n'est donc plus obligé d'être fixe !
Cet avantage peut être utilisé dans une éventuelle réactualisation des images de références (par exemple : si un éclairement n'est plus rencontré depuis un certain temps, son image représentative est enlevée des images de référence afin d'éviter de 'parasiter' d'éventuels traitements basés sur les images de référence).

3.2.3°) …vers les moindres carrés

L'annexe 6.2 montre les particularités d'une pseudo-matrice. L'une de ces particularités provient de la construction même de la matrice :

« La matrice M^+, pseudo-inverse d'une matrice M(m,n), est telle que:
Soit le système matriciel M X=Y
De tous les vecteurs solutions X qui minimisent la norme de M X-Y, celui qui minimise la norme de X vaut $X=M^+ Y$ »

Or, nous avons vu dans la partie 2.1 qu'en partant d'un système matriciel Y=A X le critère des moindres carrés peut être représenté par la minimisation de E = A X – Y, avec la matrice E correspondant aux 'écarts' à minimiser. L'objectif étant donc de faire tendre E vers le vecteur nul.
Ainsi, la définition précédente montre qu'une matrice pseudo-inverse est construite à partir du critère des moindres carrés. Elle est même construite afin de donner, dans le cas de solutions multiples, une solution de moindre norme.

Le tableau de la partie 1.3.2 nous aide à visualiser que lorsque le système V C=P n'admet pas de solution on parlera alors d'une approximation de solution par le critère des moindres carrés (les cases en rouge et roses du tableau). De même, on voit nettement que lorsque le système admet plus d'une solution, on parle alors de ne prendre que la solution au sens de la moindre norme (les cases en vert dans le tableau).
En fait, on peut considérer que le 'critère des moindres carrés' est équivalent au 'critère de moindre norme'. En effet, le critère des moindres carrés va chercher à minimiser la matrice $({}^T E\ E)$, construite à partir de la matrice E des écarts à minimiser. Le critère de moindre norme va chercher à minimiser $({}^T C\ C)$[*] afin d'obtenir une solution optimale.

[*] En effet, la norme euclidienne du vecteur C est : $((C^1)^2+ (C^2)^2+\ldots+ (C^n)^2)^{1/2}$, ainsi minimiser cette norme revient à minimiser la somme des carrés, soit minimiser $({}^T C\ C)$ comme montré dans la partie 2.1

Du coup, si le processus est le même (minimisation d'une matrice de type Gram[**]) on parlera de critère de moindres carrés lorsque l'on appliquera ce processus dans la recherche d'une approximation. Le résultat obtenu étant un résultat mathématique purement théorique qui n'a pas de réalité. Et l'on parlera de critère de norme minimale dans la recherche d'une solution optimale qui a une réalité dans le système étudié.

4°) Résultats

Dans l'ensemble, nous pouvons constater une amélioration des résultats par rapport au TER. Les images sont nettement moins bruitées. L'amélioration peut se constater à la sortie des deux méthodes, et les post-traitements utilisés pour le TER peuvent ensuite s'appliquer aux résultats de la DVS. Au final du post-traitement, les résultats du projet restent de meilleure qualité que ceux du TER.

En sortie directe des méthodes :
1er Jeu :

Images du TER Images du projet

(les autres images des résultats sont jointes dans un fichier à part)

[**] Les matrices de Gram G sont les matrices de la forme G= ${}^{T}M$ M, pour M une matrice quelconque.

5°) Et ensuite…

- Pour la gestion d'une vidéo, on peut désormais réactualiser les images de référence, par exemple dans une fenêtre de temps. Ainsi, s'il reste assez longtemps, un objet ajouté peut devenir à son tour un élément de décor afin de rechercher tout nouvel objet ajouté. Cette gestion de la réactualisation vient du fait que l'on peut désormais faire varier n. Par contre, il faut savoir que moins il y aura d'images des référence, plus la moindre variation de luminosité sera détectée. Cela pourrait se justifier dans une zone d'observation à luminosité peu variable (en cas de nuit par exemple). Cas qui n'est pas considéré dans la méthode du TER ou avec une dégradation du nombre de voisins considérés.
- Définir un système de reconnaissance de 'vecteur-texture': dans le projet, nous gardons pour chaque point le vecteur C correspondant. Il serait intéressant de rechercher s'il est possible de regrouper les points 'par relation linéaire équivalente', c'est à dire par vecteurs égaux ou équivalents (à une tolérance près à déterminer), afin de limiter la place en mémoire: on ne garderait alors en mémoire qu'une seule information (un numéro de 'vecteur-texture', au lieu des v informations).

6°) Annexes / Rappels mathématiques

6.1°) Rang d'une matrice :

Soient p le nombre de lignes linéairement indépendantes de M et q le nombre de colonnes linéairement indépendantes de M.
Le rang d'une matrice M est tel que rang(M)=min(p,q)

6.2°) Pseudo-inverse d'une matrice :

On appelle pseudo-inverse, inverse généralisée ou inverse de Penrose-Moore d'une matrice M(m,n) la matrice M^+, telle que:

Soit le système matriciel M X=Y

De tous les vecteurs solutions X qui minimisent la norme de M X-Y, celui qui minimise la norme de X vaut $X=M^+ Y$

Ainsi, M^+ est l'unique matrice qui satisfait:
Conditions de Moore-Penrose:

$M M^+ M=M$
$M^+ M M^+=M^+$
$(M M^+)^T=M M^+$
$(M^+ M)^T=M^+ M$

La matrice satisfait également :

$(M^+)^+=M$
$(M^+)^T=(M^T)^+$
$(a M)^+=a^{-1} M^+$

Toute matrice M possède une matrice pseudo-inverse M^+.*

De plus :
- Si rang(M)=m, alors $M M^T$ est inversible et $M^+=M^T (M M^T)^{-1}$
Dans ce cas, M^+ est appelée pseudo-inverse à droite et minimise la norme de X.
- Si rang(M)=n, alors $M^T M$ est inversible et $M^+= (M^T M)^{-1} M^T$
Dans ce cas, M^+ est appelée pseudo-inverse à gauche et donne la solution des moindres carrés.
- Si rang(M)=m=n, alors $M^+=M^{-1}$

* Mathématiques et informatique, Problèmes résolus, Algèbre, Combinatoire, Arithmétique : J.Berstel, J-E. Pin, M. Pocchiola, 1991 (publ. McGraw-Hill), p 25 et suivantes.

7°) Sources

http://coaching.epfl.ch/php/download/moindrescarres.pdf

-> Sur les moindres carrés…

http://www.unilim.fr/pages_perso/jean.debord/math/matrices/matrices.htm

-> Présentation de méthode de résolution de systèmes + rappels sur les matrices

http://eig.unige.ch/cmefe/cours/notes/Cmefe-introduction_aux_matrices.pdf

-> Rappels complets sur les matrices, présentation de la DVS

http://www.iro.umontreal.ca/~meunier/Seminaires/SVD_seminaire.pdf

-> Présentation de la DVS, et de comment la calculer

http://www.cmi.univ-mrs.fr/~contensi/these/these.html

-> Rappel d'algèbre linéaire, présentation de la DVS

http://lcvmwww.epfl.ch/~lcvm/MathApp/chap1.pdf

-> Présentation de la méthode de Jacobi

http://www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/MathInfo/volumes.pdf

-> Rappels de maths, présentation de la méthode de Jacobi

Mathématiques et informatique, Problèmes résolus, Algèbre, Combinatoire, Arithmétique, J.Berstel, J-E. Pin & M. Pocchiola (publ. McGraw-Hill, 1991)

Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, P.G. Ciarlet, Masson (1982)

Matrix Computations (third edition), G.H. Golub & C.F. Van Loan, The Johns Hopkins University Press (1996)

& enfin Moore et Penrose pour avoir été bien urbains dans la mise en œuvre des matrices pseudos-inverses qui sauvent la vie.